

Sieht man von Faktoren K ab, die bei Festkörpern [Gl. (6)] die Form der Signalanteile verändern können, so zeigt der Vergleich von Gl. (6) und Gl. (10), daß sich im allgemeinen Fall nach 1, 2 und 3 Impulsen für den Festkörper mit einheitlicher Kernspinsorte $I = 1/2$ alle — aber keine zusätzlichen — aus den Lösungen der Blochschen Gleichungen bereits bekannten Signalanteile ergeben. Insbesondere enthält Gl. (6) alle auch in Flüssigkeiten auftretenden Echos. Grundsätzliche Unterschiede bestehen jedoch z. T. bei den verschiedenen Amplitudenfaktoren, d. h. bei der Abhängigkeit der Signalamplituden von den Versuchsparametern. Da sich in Flüssig-

keiten alle Signale nach Folgen mit mehr als 3 Impulsen rekursiv aus den nach 3 Impulsen vorhandenen ableiten lassen²², sind für diese Fälle auch in Festkörpern *keine*, nicht bereits aus Lösungen der Blochschen Gleichungen bekannten Signale zu erwarten.

Herrn Prof. Dr. H. O. KNESER danke ich für die Förderung dieser Arbeit und kritische Durchsicht des Manuskripts, den Herren Dr. F. NOACK und Dr. U. HAEBERLEN für nützliche Hinweise und Diskussionen. Die Deutsche Forschungsgemeinschaft unterstützte die Arbeit durch Sachbeihilfen.

²² R. HAUSER, Dissertation, Stuttgart 1964.

Ein einfaches Modell für Elektronenkanonen mit gekrümmter Kathodenoberfläche *

ROLF LAUER

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt, Braunschweig)

(Z. Naturforsch. 23 a, 100—109 [1968]; eingegangen am 6. Oktober 1967)

Das elektrische Feld in Elektronenkanonen mit Kugelkathoden wird in Kathodennähe durch ein Zentraalfeld, in der Nähe von Wehnelt- und Anodenblende als kurze Linsenfelder und zwischen diesen beiden Blenden durch ein ebenes Feld dargestellt. Lage und Größe des Brennflecks ergeben sich bei diesem Modell als Funktionen von Kathodenradius, gegenseitigen Abständen der Elektroden und den Elektrodenpotentialen. — Erhöht man das Wehneltpotential, ausgehend vom Sperrpotential, so läuft der Brennfleck aus der Elektronenkanone heraus durch den Anodenraum ins Unendliche, springt dann in den Raum hinter der Kathode um und nähert sich ihr wieder. Der Brennflecksradius ist proportional zum Abstand des Brennflecks von einer nahe bei der Kathodenkugel gelegenen Ebene und, für kleine Kathodenkugeln, proportional zum Kathodenradius.

I.

Es ist bekannt, daß die von einer Elektronenkanone ausgesandten paraxialen Strahlen von einem senkrecht auf der optischen Achse gelegenen kleinsten Querschnitt, dem sogenannten Brennfleck, herzukommen scheinen. Durchmesser und Lage des Brennflecks hängen von der Geometrie und den elektrischen Daten der Kanone ab. Da es sehr schwierig ist, den Strahlengang in einem solchen System exakt zu berechnen, ist man darauf angewiesen, sich die Kenntnis über die Brennfleckdaten anhand von Modellen zu verschaffen.

Die einfachste Modellvorstellung geht von einer ebenen Kathodenfläche aus¹. Die Brennfleckgröße in diesem System ist unabhängig von der Ausdehnung des emittierenden Kathodenbereiches². Im

Experiment werden dagegen meist gekrümmte Kathodenflächen, z. B. Haarnadel oder Spitzenkathoden verwendet, bei denen eine starke, bei kleinsten Kathoden allerdings wegen experimenteller Schwierigkeiten nicht mehr quantitativ erfassbare Abhängigkeit der Brennfleckgröße vom Kathodenradius beobachtet wird. Das Modell mit ebener Kathode stellt daher nur eine sehr schlechte Näherung für die in der Praxis vorkommenden Systeme dar. Es soll im folgenden durch ein Modell mit Kugelkathode ersetzt werden, mit dessen Hilfe die Radiusabhängigkeit bis zu kleinsten Kathodenkugeln (Modell für die Spitzenkathode) rechnerisch ermittelt werden kann. Außerdem soll es den Einfluß des Wehnelt-Potentials auf Brennflecklage und Brennfleckgröße beschreiben.

* Auszugsweise vorgetragen am 2. 9. 1966 auf dem Sixth International Congress for Electron Microscopy in Kyoto; s. auch R. LAUER u. K.-J. HANSSEN, Electron Microscopy 1966, 6th Intern. Congr. for El. Microsc. Bd. I, Tokyo 1966, S. 129.

¹ Zum Beispiel: J. DOSSE, Z. Phys. 115, 530 [1940].
² W. GLASER, Grundlagen der Elektronenoptik, Wien 1952, S. 272 ff.



II. Modell für die Elektronenkanone

A) Eigenschaften des Modells

Wir betrachten eine Elektronenkanone, die aus kugelförmiger Kathode sowie aus ebener Wehnelt- und Anodenblende besteht. Für die Berechnung des Strahlenganges gehen wir von folgenden Vereinfachungen aus (vgl. Abb. 1a):

1. Einheitliche kinetische Energie $-e(U_K - U_0)$ der emittierten Elektronen (U_0 = Ruhepotential der Elektronen, U_K = Potential der Kathodenoberfläche, e = Elementarladung); keine Raumladung vor der Kathode.

2. Kugelsymmetrie für das elektrische Feld in Kathodennähe³; da die Abweichung von der Zentraleinsymmetrie in der Nähe der Wehnelt-Ebene wegen der geringen Feldstärke in diesem Gebiet nur noch einen geringen Einfluß auf den Bahnverlauf hat, denken wir uns das Zentralfeld bis zur Wehnelt-Ebene hin fortgesetzt.

3. Sattelpotential U_W^0 im Achsenpunkt zw der Wehnelt-Ebene stets positiver als das Kathodenpotential U_K (andernfalls können keine Elektronen die Kanone verlassen).

4. Ebenes Beschleunigungsfeld zwischen der Wehnelt-Koordinate z_W mit dem Potential U_W^0 und der Anodenkoordinate z_A mit dem Potential U_A .

5. Feldinhomogenitäten in den Bohrungen von Wehnelt- und Anodenblende als kurze Linsen darstellbar, siehe^{4,5}; (ihre Wirkung wird nur in paraxialer Näherung behandelt).

Die Bahnbestimmung im Zentralfeld unterliegt nicht der paraxialen Näherung. In diesem Feld können also auch Bahnen von Elektronen, die mit großer Neigung zur optischen Achse emittiert werden, berechnet werden. Diese Bahnen krümmen sich in Kathodennähe so stark, daß sie schon in kurzer Entfernung von der Kathode fast parallel zur Normalen des Kathodenelements verlaufen, von dem sie ausgehen.

Am Ende des Zentralfeldes stark zur optischen Achse geneigte Strahlen können nur von Kathoden-

gebieten ausgehen, deren Normalen stark zur optischen Achse geneigt sind. Der Durchlaßbereich der Wehnelt-Bohrung ist so groß, daß dessen Randzone auch diese Strahlen durchläßt. Ihr weiterer Verlauf kann nicht durch paraxiale Näherung erfaßt werden. Das Modell kann jedoch nach den Annahmen von Punkt 5 nur Paraxialstrahlen, also die durch das Zentrum der Wehnelt-Bohrung gehenden Strahlen beschreiben. Die durch die Randzone der Wehnelt-Bohrung gehenden Strahlen unterliegen geometrischen Bildfehlern, über die am Ende der Rechnungen einige qualitative Angaben gemacht werden können.

B) Strahlengang im Modell

Zur Ermittlung des Strahlenganges betrachten wir Abb. 1b. Im Zentralfeld verlaufen die Elementarbündel zentraleinsymmetrisch zum Kathodenmittelpunkt. Die am Ende des Zentralfeldes an Strahlen, die unter einheitlichem Winkel gegen die Kathodenormalen emittieren, angelegten Tangenten scheinen von einer rückverlegten „virtuellen“ Kathode auszugehen. Aus Symmetriegründen muß letztere konzentrisch zur reellen Kathode liegen. Die durch die Tangenten bestimmten rückwärtigen Verlängerungen jener Bündel, die vom achsennahen Kathodengebiet ausgehen, haben in der Kathodenmitte nahezu einen gemeinsamen Querschnitt. Im optischen Sinne liegt hier eine Pupille vor, von der alle Strahlen, die das Zentralfeld verlassen, geradlinig auszugehen scheinen. Vom anschließenden Strahlengang aus betrachtet, kann diese Pupille als „Eintrittspupille“ aufgefaßt werden.

An das Zentralfeld schließt sich die Feldinhomogenität in der Wehnelt-Bohrung an. Da sie in unserem Modell wie eine kurze Linse behandelt wird, kann ihre Wirkung als Knickung der Elektronenbahnen beschrieben werden. Im anschließenden ebenen Beschleunigungsfeld können die Elektronenbahnen durch Parabelbögen dargestellt werden. Die Wirkung der Feldinhomogenität in der Anodenbohrung kann, wie die Berechnungen zeigen werden, vernachlässigt werden. Beide Feldinhomogenitäten und das ebene Feld zusammen (im folgenden kurz

³ Instruktive Beispiele hierfür bei E. SUGATA u. H. HAMADA, J. Electronenmier. Ann. Ed. 8, 4 [1960], Abb. 1. Kugelsymmetrie vor der Kathode ist nicht vorhanden, wenn die Feldstärke vor der Kathode exakt verschwindet; der Achsenpunkt der Kathodenfläche wird dann zu einem Verzweigungspunkt von Äquipotentiallinien, vgl. z.B. M. PLOKE, Z. ang. Phys. 3, 441 [1951] und 4, 1

[1952]. Dieser Fall interessiert in unserem Zusammenhang nicht, da die Elektronenkanone an diesem Arbeitspunkt ohnehin sperrt.

⁴ V. K. ZWORYKIN et al., Electron Optics and the Electron Microscope, New York 1948, S. 444 ff.

⁵ R. GANS, Z. techn. Phys. 18, 41 [1937].

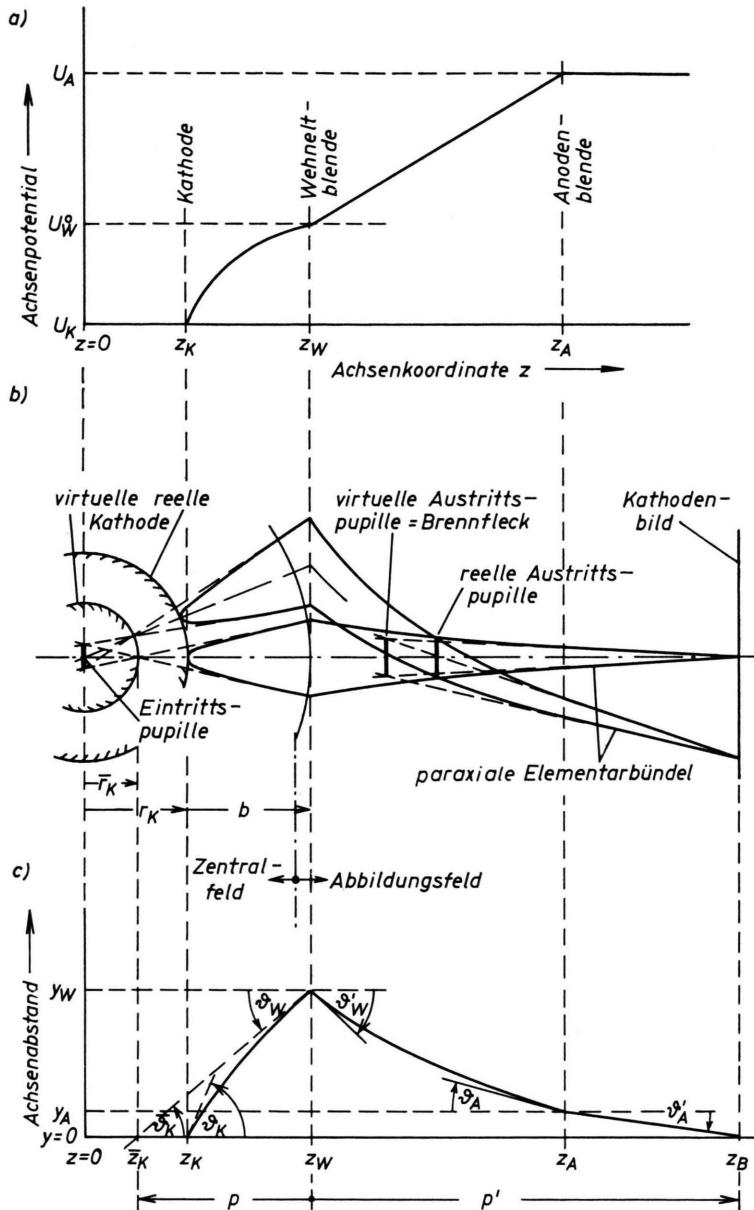


Abb. 1. Das Modell der Elektronenkanone. a) Verlauf des elektrostatischen Potentials längs der optischen Achse. b) Strahlengang. Wenn die reelle Austrittspupille noch im Abbildungsfeld liegt, durchdringen sich, vom Anodenraum aus gesehen, die Elementarbündel nicht in der reellen, sondern in einer virtuellen Austrittspupille. Diese ist identisch mit dem Brennfleck. c) Bestimmungsstücke ϑ'_A und p' der Austrittsasymptote am Ende des Abbildungsfeldes in Abhängigkeit von den entsprechenden Daten ϑ_W und p der am Ende des Zentralfeldes angelegten Strahl tangenten.

„Abbildungsfeld“ genannt) fokussieren die scheinbar geradlinig von der virtuellen Kathode ausgehenden Strahlen in das Kathodenbild und bilden gleichzeitig die Eintrittspupille in die Austrittspupille ab. Liegt letztere außerhalb des Abbildungsfeldes, so ist sie als scheinbare Quellfläche aller Paraxialstrahlen im Anodenraum identisch mit dem Brennfleck. Liegt sie wie in Abb. 1b noch im Feld, so verlaufen die Elementarbündel bis zur Anode weiter gekrümmt. Vom Anodenraum aus gesehen erscheint

dann nicht die reelle Austrittspupille, sondern die in der Abbildung dargestellte virtuelle Austrittspupille als Brennfleck.

III. Rechnungen

A) Zentralfeld

Wir betrachten in Abb. 2 die Bahnen der unter beliebigen Winkeln $0 < \vartheta_K < \pi/2$ vom axialen Kathodenelement emittierten Elektronen und ihre

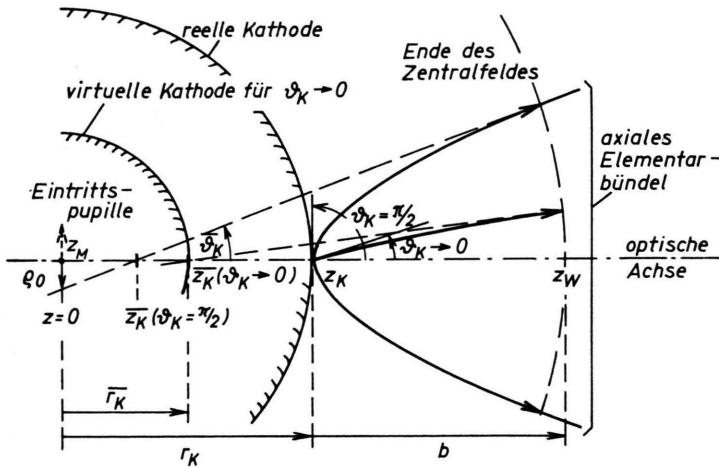


Abb. 2. Virtuelle Kathode und Eintrittspupille sind durch die am Ende des Zentraalfeldes an die Strahlen des axialen Elementarbündels angelegten Tangenten bestimmt.

Tangenten beim Verlassen des Zentraalfeldes. Wenn man zu jedem dieser Strahlen Neigung $\bar{\vartheta}_K$ und Achsenschnittpunkt \bar{z}_K der genannten Tangenten in Abhängigkeit vom Emissionswinkel ϑ_K und von der durchlaufenden Potentialdifferenz ($U_{W^0} - U_K$) angeben kann, ist die Wirkung des Zentraalfeldes vollständig bekannt. $\bar{z}_K(\vartheta_K)$ kennzeichnet Lage und Krümmungsradius der virtuellen Kathode in Abhängigkeit vom Emissionswinkel ϑ_K .

Die Tangentenneigung des parallel zur Kathodenoberfläche emittierten Strahles $\bar{\vartheta}_K(\vartheta_K \rightarrow \pi/2)$ ist gleich dem halben Öffnungswinkel der Elementarbündel. Der Abstand dieser rückwärts verlängerten Tangente vom Kathodenzentrum definiert den Radius ϱ_0 der Eintrittspupille. Er ist näherungsweise gleich dem Produkt aus Achsenschnittweite $\bar{z}_K(\vartheta_K = \pi/2)$ und Neigung $\bar{\vartheta}_K(\vartheta_K = \pi/2)$ der betrachteten Randstrahl tangent. (Kathodenzentrum = Koordinatenursprung, optische Achse im Anodenraum = positive z -Achse, die Neigung nach rechts ansteigender Strahlen wird positiv gezählt.)

Zur Berechnung dieser Daten können wir uns auf RUSKA⁶ stützen. Mit den von ihm unter Voraussetzung starker Beschleunigung im Zentraalfeld, d. h. $(U_{W^0} - U_K) \gg (U_K - U_0)$ angegebenen Gln. (30) und (32) erhält man für die Tangentenneigung $\bar{\vartheta}_K$ und den Radius der virtuellen Kathode \bar{r}_K die folgenden Näherungsgleichungen

$$\bar{\vartheta}_K = 2 \frac{b + r_K/2}{b + r_K} \sqrt{\frac{U_K - U_0}{U_{W^0} - U_K}} \sin \vartheta_K \quad (1)$$

und

$$\bar{r}_K = \frac{r_K}{2} \cdot \frac{b + r_K}{b + r_K/2}. \quad (2)$$

$b = d_f(z_W - z_K)$ ist gleich dem Abstand der Wehnelt-Ebene von der Kathode (Länge des Zentraalfeldes) und r_K der Kathodenradius.

Setzen wir $\vartheta_K = \pi/2$ in (1) ein, so erhalten wir durch Multiplikation mit (2) als Radius der Eintrittspupille

$$\varrho_0 \approx \bar{r}_K \cdot \bar{\vartheta}_K(\vartheta_K = \pi/2) = r_K \sqrt{\frac{U_K - U_0}{U_{W^0} - U_K}}. \quad (3)$$

In (2) geht der Emissionswinkel ϑ_K nicht ein. Die von RUSKA angewandten Vernachlässigungen erlauben es also nicht, den sicher vorhandenen Öffnungsfehler des Zentraalfeldes zu erfassen. Will man ihn berücksichtigen, so darf man nicht, wie bei RUSKA⁶ Gl. (26) in der Klammer

$$\left(-1 + \sqrt{\frac{b}{b + r_K} \left(\frac{b + r_K}{2b \sin^2 \vartheta_K} \cdot \frac{U_{W^0} - U_K}{U_K - U_0} \right) + 1} \right),$$

außer dem Summanden $+1$ unter der Wurzel auch noch den Summanden -1 vor der Wurzel vernachlässigen. Schleppt man -1 mit, so erhält man nach dem von RUSKA vorgezeichneten Rechengang an Stelle von (1) und (2) die genaueren Ergebnisse

$$\bar{\vartheta}_K(\vartheta_K) = 2 \frac{b + r_K/2}{b + r_K} \sqrt{\frac{U_K - U_0}{U_{W^0} - U_K}} \cdot \sin \vartheta_K \quad (1a)$$

$$\left(1 - \frac{b}{b + r_K/2} \sqrt{\frac{U_K - U_0}{U_{W^0} - U_K}} \cos \vartheta_K \right)$$

und

$$\bar{z}_K(\vartheta_K) = \frac{r_K}{2} \cdot \frac{b + r_K}{b + r_K/2} \quad (2a)$$

$$\cdot \left(1 + \frac{b}{b + r_K/2} \sqrt{\frac{U_K - U_0}{U_{W^0} - U_K}} \cos \vartheta_K \right),$$

in denen die gesuchte ϑ_K -Abhängigkeit vorkommt; das zweite Glied in der Klammer beschreibt jeweils

⁶ E. RUSKA, Z. Phys. 83, 684 [1933].

den Einfluß des Öffnungsfehlers⁷. Es gibt also für jeden Emissionswinkel ϑ_K andere Lagen der virtuellen Kathode und andere Radien der Eintrittspupille.

Bei Rechnungen im Rahmen der Gaußschen Dioptrik muß $\tilde{z}_K(\vartheta_K \rightarrow 0)$ als virtueller Kathodenort aufgefaßt werden.

Für $\vartheta_K \rightarrow \pi/2$ folgt aus (1a) und (2a) wiederum (3). (1) und (2) geben also die Daten für die virtuelle Kathode und für die Eintrittspupille der Randstrahlen wieder.

Aus Strahlneigung $\bar{\vartheta}_K(\vartheta_K)$ und Achsenschnittpunkt $\tilde{z}_K(\vartheta_K)$ läßt sich unter Annahme des Lambertischen Strahlungsgesetzes die Stromdichteverteilung in der Eintrittspupille berechnen. Während die Anwendung von (1) und (2) einen konstanten Wert über den gesamten Pupillenquerschnitt ergibt, liefern die Gln. (1a) und (2a) einen leichten Stromdichteabfall zum Pupillenrand hin.

B) Abbildungsfeld

E_w und E'_w bzw. E_A und E'_A seien die Feldstärken vor und hinter den Sprungstellen im paraxialen Bereich der Wehnelt- bzw. Anodenebene. Die Elektronen haben in der Wehnelt-Ebene die kinetische Energie $W(z_w) = -e(U_w^0 - U_0)$ und treten nach Abb. 1c mit der Neigung $\vartheta_w = \bar{\vartheta}_K$ und dem Achsenabstand y_w aus dem Zentraalfeld aus. Die Bahnneigung hinter der Sprungstelle beträgt dann nach GANS⁵, Gln. (14)–(16):

$$\vartheta'_w = \vartheta_w + \frac{y_w}{4(U_w^0 - U_0)} (E'_w - E_w). \quad (4)$$

Nach Durchlaufen des Parabelbogens im ebenen Feld mit der Feldstärke

$$E'_w \equiv E_A = -\frac{U_A - U_w^0}{z_A - z_w} \quad (5)$$

beträgt die Elektronenenergie in der Anodenebene $W(z_A) = -e(U_A - U_0)$. Die Elektronenbahn hat an dieser Stelle die Neigung

$$\vartheta_A = \vartheta'_w \sqrt{\frac{U_w^0 - U_0}{U_A - U_0}} \quad (6)$$

⁷ Koma, außeraxialer Astigmatismus und Verzeichnung können wegen der Zentralsymmetrie nicht auftreten. Da außerdem die virtuelle Kathode ein formtreues Abbild der reellen Kathode ist, kann auch nicht von Bildfeldwölbung gesprochen werden. Der Öffnungsfehler ist also der einzige Seidelsche Bildfehler des Zentraalfeldes.

und den Achsenabstand

$$y_A = y_w + 2\vartheta'_w(z_A - z_w) \\ \cdot \frac{\sqrt{(U_A - U_0)(U_w^0 - U_0)} - (U_w^0 - U_0)}{U_A - U_w^0}. \quad (7)$$

Die Bahnneigung hinter dem Knick in der Anodenebene beträgt analog zu (4)

$$\vartheta'_A = \vartheta'_w + \frac{y_A}{4(U_A - U_0)} (E'_A - E_A). \quad (8)$$

Durch (4) bis (8) kann der Strahlverlauf im Abbildungsfeld verfolgt werden. (Alle betrachteten Strahlen sind hier Paraxialstrahlen, d. h.

$$y_w, y_A \ll (z_A - z_w) \quad \text{und} \quad \vartheta_w, \vartheta'_w, \vartheta_A, \vartheta'_A \ll \pi/2.$$

Wir machen es uns zur Aufgabe, zu einer beliebigen Gegenstandsliste die zugehörige Bildlage zu ermitteln. Unter Gegenstandsliste wird dabei der Achsenschnittpunkt der Eintrittstangente, unter Bildlage der Achsenschnittpunkt der Austrittstangente an einen beliebigen Strahl durch das „Abbildungsfeld“ verstanden. Die Abstände dieser beiden Punkte von der Wehnelt-Ebene werden p und p' genannt. In Abb. 1c ist z. B. die in diesem Sinne festgelegte Abbildung der virtuellen Kathode \tilde{z}_K auf das Kathodenbild z_B dargestellt. Zur Lösung unserer Aufgabe stellen wir mit Hilfe von (4) bis (8) p' als Funktion von p dar.

Nach Abb. 1c gilt für die Abstände beliebiger konjugierter Punkte von der Ebene z_w

$$p' = (z_A - z_w) - y_A/\vartheta'_A \quad (9)$$

$$\text{und} \quad p = -y_w/\vartheta_w. \quad (10)$$

Um einigermaßen handliche Beziehungen zu erhalten, wollen wir folgende Vereinfachungen einführen:

Die Feldstärke unmittelbar vor der Wehnelt-Ebene, E_w in (4), sei gleich der Feldstärke an der äußersten Potentialfläche des Zentraalfeldes, also

$$E_w = -\frac{r_K}{r_K + b} \left(\frac{U_w^0 - U_K}{z_w - z_K} \right). \quad (11)$$

Im allgemeinen gilt

$$\frac{U_w^0 - U_K}{U_A - U_w^0} \leq \frac{z_w - z_K}{z_A - z_w}, \quad (12)$$

für Haarnadel- und Spitzenkathoden (kleine Krümmungsradien r_K) außerdem

$$r_K \ll b, \quad (13)$$

so daß man (11) im Vergleich zu (5) vernachlässigen kann. Wir setzen daher

$$E_w = 0 \quad (14)$$

in (4) ein. Da der Anodenraum feldfrei ist, gilt

$$\mathbf{E}'_A = 0. \quad (15)$$

Ferner ist in allen praktisch interessierenden Fällen stets $(U_w^0 - U_K) \ll (U_A - U_w^0)$ und für alle Strahlen des betrachteten axialen Elementarbündels y_A stets vergleichbar mit y_w . Wir können also auch

$$y_A = y_w + 2(z_A - z_w) \left[\vartheta_w - \frac{y_w(U_A - U_w^0)}{4(z_A - z_w)(U_w^0 - U_0)} \right] \sqrt{\frac{(U_A - U_0)(U_w^0 - U_0) - (U_w^0 - U_0)}{(U_A - U_w^0)}}, \quad (16)$$

und aus (8a) mit (6) und (4) unter Beachtung von (5) und (15)

$$\vartheta'_A = \left[\vartheta_w - \frac{y_w(U_A - U_w^0)}{4(z_A - z_w)(U_w^0 - U_0)} \right] \sqrt{\frac{U_w^0 - U_0}{U_A - U_0}}. \quad (17)$$

Durch Einsetzen von (16), (17) und (10) in (9) ergibt sich für die gesuchte Achsenschnittweite p' der Ausstrittsasymptoten in Abhängigkeit von der Schnittweite p der Eintrittstangente:

$$p' = -(z_A - z_w) \frac{\sqrt{U_A - U_0} - \sqrt{U_w^0 - U_0}}{\sqrt{U_A - U_0} + \sqrt{U_w^0 - U_0}} + \left[\frac{p}{1 + \frac{p(U_A - U_w^0)}{4(z_A - z_w)(U_w^0 - U_0)}} \right] \sqrt{\frac{U_w^0 - U_0}{U_A - U_0}}. \quad (18)$$

Hiermit haben wir eine allgemeine Verknüpfung von Ding- und Bildort im Sinne der Newtonschen Linsengleichung

$$\frac{z_B - z_{F'}}{f'} = \frac{f}{z_G - z_F} = -\beta'; \quad (\beta' = \text{Abbildungsmaßstab}) \quad (18a)$$

gewonnen.

Beweis. Ein achsenparallel in den Anodenraum austretender Strahl verläuft wegen (8a) und der Achsenparallelität des ebenen Feldes zwischen z_w und z_A von der Wehnelt-Ebene an geradlinig. Der zu $p' = \infty$ gehörende Wert von $p = z_p - z_w$ muß also identisch mit der vorderen Brennweite $f = af(z_F - z_H)$ sein; die Koordinate z_w bezeichnet die vordere Hauptebene. Den Wert von $f \equiv p$ erhalten wir durch Nullsetzen der eckigen Klammer in (18):

$$f = -4(z_A - z_w) \frac{U_w^0 - U_0}{U_A - U_w^0}. \quad (19)$$

Die hintere Brennweite f' folgt hieraus sofort durch Multiplikation mit dem Verhältnis der Elektronengeschwindigkeiten hinter und vor dem Abbildungsfeld:

$$f' = -f \sqrt{\frac{U_A - U_0}{U_w^0 - U_0}}. \quad (20)$$

Ein parallel einfallender Strahl schneidet die optische Achse im hinteren Brennpunkt $z_{F'}$. Dieser ist durch $p' = z_{F'} - z_w$ für $p = -\infty$ gekennzeichnet. Wir erhalten durch Einsetzen von $p = -\infty$ und (20) in (18)

$$p' = (z_{F'} - z_w) = -(z_A - z_w) \cdot \frac{\sqrt{U_A - U_0} - \sqrt{U_w^0 - U_0}}{\sqrt{U_A - U_0} + \sqrt{U_w^0 - U_0}} + f' \approx f' - (z_A - z_w) \quad (21)$$

und hieraus durch Einsetzen in $f' = af(z_{F'} - z_{H'})$ die Koordinate der hinteren Hauptebene

$$z_{H'} = z_w - (z_A - z_w) \cdot \frac{\sqrt{U_A - U_0} - \sqrt{U_w^0 - U_0}}{\sqrt{U_A - U_0} + \sqrt{U_w^0 - U_0}} \approx z_w - (z_A - z_w). \quad (22)$$

den Bahnknick (8) in der Anodenebene gegenüber dem Bahnknick (4) in der Wehnelt-Ebene vernachlässigen, wir setzen daher

$$\vartheta'_A = \vartheta_A. \quad (8a)$$

Unter diesen Annahmen erhält man mit (4) unter Beachtung von (14) und (5) aus (7)

$$y_A = y_w + 2(z_A - z_w) \left[\vartheta_w - \frac{y_w(U_A - U_w^0)}{4(z_A - z_w)(U_w^0 - U_0)} \right] \sqrt{\frac{(U_A - U_0)(U_w^0 - U_0) - (U_w^0 - U_0)}{(U_A - U_w^0)}} , \quad (16)$$

und aus (8a) mit (6) und (4) unter Beachtung von (5) und (15)

$$\vartheta'_A = \left[\vartheta_w - \frac{y_w(U_A - U_w^0)}{4(z_A - z_w)(U_w^0 - U_0)} \right] \sqrt{\frac{U_w^0 - U_0}{U_A - U_0}}. \quad (17)$$

Durch Einsetzen von (16), (17) und (10) in (9) ergibt sich für die gesuchte Achsenschnittweite p' der Ausstrittsasymptoten in Abhängigkeit von der Schnittweite p der Eintrittstangente:

In unserer Schreibweise bedeuten

$$(z_G - z_H) = af p \quad \text{die Gegenstandsweite und} \quad (23)$$

$$(z_B - z_{H'}) = af p' - (z_{H'} - z_w) \quad \text{die Bildweite.} \quad (24)$$

Um (18a) zu verifizieren, setzen wir (19), (20) sowie (22) bis (24) in (18) ein. Wir erhalten

$$(z_B - z_{H'}) + (z_{H'} - z_w) = (z_{H'} - z_w) - \frac{z_G - z_H}{\left(1 - \frac{z_G - z_H}{f}\right)f/f'}. \quad (19b)$$

Subtraktion von $(z_{H'} - z_w) + f'$ und Division durch f' auf beiden Seiten ergibt schließlich unter Beachtung von

$$(z_B - z_{H'}) - f' = (z_B - z_{F'}) \quad \text{und} \quad (z_G - z_H) - f = (z_G - z_F) \quad (25)$$

die Newtonsche Abbildungsgleichung (18a).

Das Abbildungsfeld wirkt also wie eine dicke *Immersionslinse* mit einer festen vorderen Hauptebenenlage $z_H = z_w$ und einer von den Spannungsverhältnissen schwach abhängigen hinteren Hauptebenenlage $z_{H'}$. Der Abbildungsmaßstab β' dieser Linse folgt aus der rechten Seite der Doppelgleichung (18a), wenn man die gegenstandsseitige Schnittweite p nach (23) unter Beachtung von

(25) und die Brennweite (19) einsetzt. Das Ergebnis ist:

$$\beta' = -\frac{f}{p-f} = \frac{1}{1 + \frac{p(U_A - U_{w^0})}{4(z_A - z_W)(U_{w^0} - U_0)}}. \quad (26)$$

C) Brennfleckdaten

Mit der Verknüpfung von Ding- und Bildort (18) und dem Abbildungsmaßstab (26) sind die paraxia-

len Eigenschaften des Abbildungsfeldes bekannt. Wir können hieraus den Abstand $P' = (z_{P'} - z_W)$ des Brennflecks von der Wehnelt-Ebene und den Radius ϱ des Brennflecks berechnen, indem wir die Entfernung $-(r_K + b)$ der Eintrittspupille von der Wehnelt-Ebene als Gegenstandsweite und den Radius ϱ_0 der Eintrittspupille nach (3) als Gegenstandsgröße auffassen. Wir erhalten so für den Abstand des Brennflecks von der Wehnelt-Ebene:

$$P' = -(z_A - z_W) \frac{\sqrt{U_A - U_0} - \sqrt{U_{w^0} - U_0}}{\sqrt{U_A - U_0} + \sqrt{U_{w^0} - U_0}} - \left[\frac{r_K + b}{1 - \frac{(r_K + b)(U_A - U_{w^0})}{4(z_A - z_W)(U_{w^0} - U_0)}} \right] \sqrt{\frac{U_{w^0} - U_0}{U_A - U_0}}, \quad (27)$$

und für den Brennfleckradius unter Berücksichtigung von (27) und (22):

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0 \beta' [p = -(r_K + b)] = r_K \sqrt{\frac{U_K - U_0}{U_{w^0} - U_K}} \frac{1}{1 - \frac{(r_K + b)(U_A - U_{w^0})}{4(z_A - z_W)(U_{w^0} - U_0)}} \\ &\approx -\frac{r_K}{r_K + b} \sqrt{\frac{U_K - U_0}{U_A - U_0}} (z_{P'} - z_{H'}) \quad \text{für } (U_{w^0} - U_K) \gg (U_K - U_0). \end{aligned} \quad (28)$$

Beide Daten hängen hiernach

1. von den geometrischen Daten Kathodenradius und gegenseitige Elektrodenabstände,
2. von den Spannungen $(U_{w^0} - U_K)$ und $(U_A - U_{w^0})$ und
3. von den Elektronenenergien $-e(U_K - U_0)$, $-e(U_{w^0} - U_0)$ und $-e(U_A - U_0)$ an der Kathode, im Achsenpunkt der Wehnelt-Ebene und in der Anodenebene ab.

In Abb. 3a ist die Brennflecklage in Abhängigkeit von der Spannung $(U_{w^0} - U_K)$ wiedergegeben. Parameter ist der Kathodenradius r_K ; der Abstand b zwischen Wehnelt-Ebene und Kathode wird als fest angesehen. Die vorgegebenen elektrischen und geometrischen Daten sind der Abbildungsunterschrift zu entnehmen. In Abb. 3b ist der Brennfleckradius

gegen die Brennflecklage aufgetragen⁸. Parameter ist, wie im Teilbild 3a, der Kathodenradius. Diese Diagramme werden in Abschnitt IV diskutiert.

D) Bildfehler

An dieser Stelle müssen einige Worte über den Einfluß der geometrischen Bildfehler auf den Abbildungsvorgang gesagt werden. Wir betrachten die Abbildung des Achsenschnittpunktes $z=0$ der Eintrittspupille in das zugehörige Bildelement im Brennfleck. Auf diese Abbildung kann sich nur der Öffnungsfehler des Abbildungsfeldes auswirken: Er läßt den bildseitigen Schnittpunkt aller scheinbar von $z=0$ ausgehenden Strahlen in eine Kaustik entarten. Auf Strahlenbündel, die von dem betrachteten Punkt der Eintrittspupille eng benachbarten

⁸ Zum Vergleich wurden auch Brennflecklage und -größe für eine Elektronenkanone mit ebener Kathode ($r_K = \infty$) berechnet und in Abb. 3 eingezeichnet. Allerdings waren hierzu die Formeln (27) und (28) abzuändern. Mit $r_K \rightarrow \infty$ folgt aus (11)

$$E_W = -\frac{U_{w^0} - U_K}{z_W - z_K}, \quad (11a)$$

d.h., man kann in (4) nicht mehr E_W gegen E'_W vernachlässigen. Man erhält so an Stelle von (27) mit $p = -\infty$ für den Abstand der Eintrittspupille von der Wehnelt-Ebene

$$P'_{\text{eben}} = -(z_A - z_W) \frac{\sqrt{U_A - U_0} - \sqrt{U_{w^0} - U_0}}{\sqrt{U_A - U_0} + \sqrt{U_{w^0} - U_0}} + \left[\frac{4b}{(z_A - z_W) \left(\frac{U_A - U_{w^0}}{U_{w^0} - U_0} \right) - \left(\frac{U_{w^0} - U_K}{U_{w^0} - U_0} \right)} \right] \sqrt{\frac{U_{w^0} - U_0}{U_A - U_0}}. \quad (27a)$$

Für den Brennfleckradius erhält man unter Berücksichtigung von (11a)

$$\varrho_{\text{eben}} = -4b \sqrt{\frac{U_K - U_0}{U_{w^0} - U_K}} \frac{1}{\left[\frac{b}{(z_A - z_W) \left(\frac{U_A - U_{w^0}}{U_{w^0} - U_0} \right) - \left(\frac{U_{w^0} - U_K}{U_{w^0} - U_0} \right)} \right]}. \quad (28a)$$

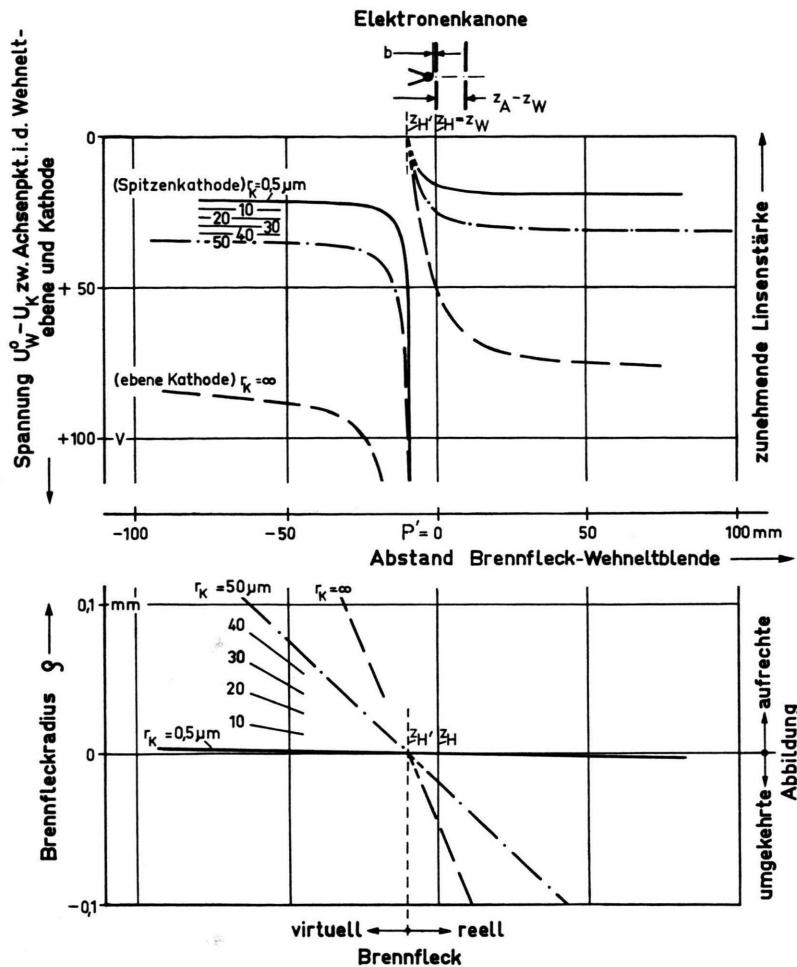


Abb. 3. Rechenergebnisse. a) Lage des Brennflecks in Abhängigkeit von der Spannung ($U_w^0 - U_K$) für verschiedene Kathodenradien r_K sowie für eine ebene Kathode nach (27), (27a). b) Brennfleckradius ρ in Abhängigkeit von der Brennflecklage P' nach (28), (28a). — Rechendaten: $b = (z_w - z_K) = 0,08 \text{ mm}$; $(z_A - z_w) = 10 \text{ mm}$; $U_A - U_K = 10 \text{ kV}$. Austrittsenergie der Elektronen $kT = -e(U_K - U_0) = 0,25 \text{ eV}$, entsprechend einer Kathodentemperatur von 2900°K . Nach (29) kann $(U_w^0 - U_K)$ näherungsweise gleich der Differenz zwischen Wehnelt-Spannung und Sperrspannung gesetzt werden.

Punkten ausgehen, wirkt praktisch auch nur der Öffnungsfehler (Isoplanasiebedingung). Die bildseitigen Kaustiken dieser Strahlenbündel haben anähernd die gleiche Form wie die Kaustik des axialen Bündels und sind gegenüber dieser um einen kleinen Winkel geneigt. Durch Überlagerung aller Strahlenbündel erlangen die Kaustikmäntel endliche Wandstärke. In der Nachbarschaft der Kaustikspitze hat diese den gleichen Wert wie der Brennfleckdurchmesser.

Zusammenfassend kann über die Bildfehler folgendes gesagt werden: Der Öffnungsfehler des Abbildungsfeldes bestimmt die Form der Kaustik in der Nachbarschaft der Kaustikspitze. Der Öffnungsfehler des Zentralfeldes modifiziert im geringen Maße die Stromdichteverteilung im Brennfleck⁹ (s. Abschn. III A).

IV. Diskussion der Ergebnisse

A) Zusammenhang zwischen Achsenpotential und Blendenpotential in der Wehnelt-Ebene

In das Modell gehen die Abmessungen der Bohrungen in Wehnelt-Elektrode und Anode nicht ein. Die Anodendaten haben praktisch kaum einen Einfluß; ihre Linsenwirkung wurde ohnehin im Modell

⁹ Anders liegen die Verhältnisse bei der Abbildung der Kathodenoberfläche. Das *Abbildungsfeld* bewirkt eine Verzeichnung, da die Strahlenbündel zu jedem Bildelement andere Punkte der Kaustik durchlaufen. Der Einfluß des Öffnungsfehlers ist bei dieser Abbildung nicht groß, da die von den einzelnen Kathoden-elementen ausgehenden Elementarbündel bei weitem nicht die volle Apertur der Wehnelt-Blende beanspruchen. Die übrigen Seidelschen Bildfehler des Abbildungsfeldes und der Öffnungsfehler des *Zentralfeldes* beeinträchtigen ebenfalls das Kathodenbild.

vernachlässigt. Die Geometrie der Wehnelt-Bohrung bestimmt dagegen zusammen mit dem Wehnelt-Potential U_w das Potential U_w^0 im Achsenpunkt der Wehnelt-Ebene, das in entscheidender Weise in unsere Endgleichungen eingeht. Das Potential U_w^0 ist aber im allgemeinen im Experiment nicht bekannt. Um das Modell für praktische Zwecke anwenden zu können, muß eine Beziehung zwischen U_w und U_w^0 angegeben werden. In einfachster Näherung soll an dieser Stelle geschrieben werden:

$$(U_w^0 - U_K) = (U_w - U_{\text{Sperr}}), \quad (29)$$

wobei U_{Sperr} das Potential der Wehnelt-Elektrode am Sperrpunkt bedeutet.

Die näherungsweise Gültigkeit dieser Gleichung kann man folgendermaßen einsehen: Am Sperrpunkt muß notwendigerweise $U_w^0 \approx U_K$ sein. Ändert man das Wehnelt-Potential, ausgehend vom Sperrpunkt, so ändert sich U_w^0 gleichsinnig. Nimmt man eine lineare Abhängigkeit zwischen beiden Potentialen an und setzt die Proportionalitätskonstante gleich 1, so erhält man (29).

Mit dieser Näherung, die mit dem nicht berücksichtigten Einfluß der Bohrungsdaten in der Wehnelt-Blende zusammenhängt, ist eine quantitative Übereinstimmung zwischen Modell und wirklicher Elektronenkanone nicht zu erwarten. Das Modell kann aber bei Bedarf so verbessert werden, daß eine genauere Übereinstimmung mit realen Systemen erreicht wird.

B) Brennflecklage und Brennfleckgröße

In Abb. 3a ist die *Brennflecklage* P' als Funktion der Differenz $(U_w - U_{\text{Sperr}})$ zwischen Wehnelt- und Sperrspannung dargestellt. [Nach (29) ist diese näherungsweise gleich $(U_w^0 - U_K)$.] Öffnet sich der Potentialvorhang in der Wehnelt-Blende [$(U_w - U_{\text{Sperr}})$ von 0 an wachsend], so nimmt die Brennweite des Abbildungsfeldes zu. Der Brennfleck läuft dabei aus dem Innern der Elektronenkanone heraus in den Anodenraum. Er ist, solange er im Anodenraum liegt, das reelle Bild der Eintrittspupille; die paraxialen Strahlen verlassen die Elektronenkanone konvergent. Der Brennfleck erreicht die Position $P' = +\infty$ und schlägt nach $P' = -\infty$ in den Raum hinter der Kathode um. Vergrößert man $(U_w - U_{\text{Sperr}})$ weiter, so nähert sich der Brennfleck von dorther wieder der Elektronenkanone. Er ist jetzt

das virtuelle Bild der Eintrittspupille; die paraxialen Strahlen verlassen die Elektronenkanone divergent. Diese Aussagen stimmen mit experimentellen Beobachten¹⁰ an allen Elektronenkanonen überein.

Der Spannungswert $(U_w - U_{\text{Sperr}})$, bei welchem der Brennfleck von $P' = +\infty$ nach $P' = -\infty$ umschlägt, hängt vom Kathodenradius ab. Er nimmt, ebenfalls in Übereinstimmung mit dem Experiment (vgl. z. B. ¹¹ Abb. 6) mit wachsendem Kathodenradius zu.

Man kann aus (18) auch die Lage des Kathodenbildes berechnen, wenn man für p den Abstand $(z_K - z_w)$ der virtuellen Kathode von der Wehnelt-Ebene einsetzt. Die Lage des Kathodenbildes zeigt eine ähnliche Abhängigkeit von der Spannung $(U_w - U_{\text{Sperr}})$ wie die Brennflecklage. Die Diagramme erscheinen lediglich zu niedrigeren Spannungswerten hin verschoben, da die virtuelle Kathode stets in kürzerer Gegenstandsweite als die Eintrittspupille liegt. Der Spannungsunterschied für gleiche Lagen von Brennfleck und Kathodenbild nimmt mit dem Kathodenradius ab. Bei Spitzenkathoden fallen Brennfleck und Kathodenbild im Rahmen der Zeichengenauigkeit zusammen.

Der *Brennfleckradius* ϱ ist in Abhängigkeit von der Brennflecklage in Abb. 3b dargestellt. Er ist bei gegebenem Kathodenradius r_K nach (28) proportional zum Abstand des Brennflecks von der hinteren Hauptebene des Abbildungsfeldes. Der Brennfleck wird also sowohl nahe am Sperrpunkt mit $U_w - U_{\text{Sperr}}$, als auch bei sehr hohen Spannungen $(U_w - U_{\text{Sperr}})$ extrem klein. Der letztgenannte Fall hat Vorteile für die Anwendung¹², da bei offener Wehnelt-Blende infolge hoher Feldstärke vor der Kathode keine Raumladungsscheinungen die Brennfleckausbildung beeinträchtigen.

Bei fest vorgegebenen Brennflecklagen P' und kleinen Kathodenradien ist der Brennfleckradius ϱ proportional zum Kathodenradius r_K . Für die Anwendung ergibt sich also auch von diesem Gesichtspunkt her die Forderung, die Technik zur Herstellung von Kathodenspitzen mit kleinsten Krümmungsradien zu vervollkommen und die Verwendung dieser Kathoden in Elektronenkanonen mit kleinsten Brennflecken weiter zu verfolgen.

Bei vorgegebener Wehnelt-Spannung sind Brennfleckgröße und Kathodenradius auch nicht annähernd zueinander proportional. Das soll an einem Beispiel gezeigt werden, welches aus Abb. 3a gemeinsam mit Abb. 3b abgelesen werden kann: Vor-

¹⁰ Zum Beispiel: K.-J. HANSZEN, Z. Naturforsch. **19a**, 896 [1964].

¹¹ Zum Beispiel: K.-J. HANSZEN u. R. LAUER, Z. Naturforsch. **22a**, 238 [1967].

¹² Vergleiche auch: R. SPEIDEL, Optik **23**, 125 [1965/66].

gegeben sei die Spannung ($U_w - U_{\text{Sperr}}$) = 36 V. Eine kleine Kathodenkugel von $r_K = 50 \mu\text{m}$ Radius liefert in diesem Fall in virtueller Abbildung einen Brennfleckradius $\varrho = + 53 \mu\text{m}$, eine ebene Kathode dagegen in reeller Abbildung den kleineren Radius $\varrho = - 26 \mu\text{m}$.

Auch diese Ergebnisse, insbesondere die berechneten Abhängigkeiten der Brennfleckdaten vom Kathodenradius, werden durch experimentelle Untersuchungen mit dem Schattenverfahren¹⁰ bestätigt.

C) Abbildungsfehler

Auch unsere Aussagen über den Einfluß der Bildfehler werden durch die Praxis bestätigt. Mit Hilfe des Schattenverfahrens¹⁰ gelangt man z.B. zu folgenden Ergebnissen:

1. Die Wandstärke des ersten Kaustikmantels ist in der Nachbarschaft der Kaustikspitze stets gleich dem Brennfleckdurchmesser. Sie hängt daher bei vorgegebener Brennflecklage nur von der Größe

der benutzten Kathodenkugel ab, ist also im wesentlichen durch die Daten des Zentralfeldes bestimmt.

2. Die Form der Kaustik ist bei vorgegebener Brennflecklage unabhängig von der Größe der verwendeten Kathodenkugel. Unveröffentlichte Experimente mit Hilfe des Schattenverfahrens an Elektronenkanonen mit verschiedener Elektrodengeometrie zeigen darüber hinaus, daß die Kaustikform stark von der Feldverteilung zwischen den beiden Blenden abhängt. Sie ist also im wesentlichen durch die Bildfehler des Abbildungsfeldes festgelegt.

Das Modell liefert somit trotz seiner Einfachheit wichtige Aussagen über paraxiale und außeraxiale Strahldaten eines Elektronenbündels, das aus Elektronenkanonen mit Kugelkathoden in den Anodenraum austritt.

Herrn Dr. HANSZEN danke ich für viele wertvolle Ratschläge und Diskussionen.

Massenspektrometrische Untersuchung der Sekundärionen-Emission von Legierungen *

JAKOB SCHELTEN **

Physikalisches Institut der Universität, Mainz

(Z. Naturforsch. **23 a**, 109—113 [1968]; eingegangen am 29. September 1967)

An alloy bombarded with 12 keV — Ar⁺-ions emits singly charged secondary ions (SI) of all components of the target. By measuring the SI-currents in a mass spectrometer a quantitative analysis is possible (Ion-bombardment ion source).

The SI-emission of aluminium and iron alloys with varying concentration of other components is investigated. It is shown that the relative SI yield, i.e., the ratio of the SI yield of the extra components to the yield of the main components aluminium and iron, respectively is independent of the composition of the sample provided that the sample contains more than 90% of the main component. This result is in qualitative agreement with the Langmuir-Saha-equation.

Eine Möglichkeit zur massenspektrometrischen Analyse von Festkörpern bietet die zuerst von HERZOG und VIEHBOECK¹ verwendete Ionenbeschuß-Ionenquelle. Bei diesem Ionenquellentyp wird die Probe mit Edelgasionen beschossen. Dadurch werden einfach positiv geladene, aus dem Probenmaterial gebildete Sekundärionen (SI) emittiert, die im Massenspektrometer nach Massen von einander getrennt nachgewiesen werden. Die Zu-

sammensetzung dieser SI-Ströme muß nun, damit der Festkörper quantitativ analysiert werden kann, repräsentativ für die Probenzusammensetzung sein.

Das soll in dieser Arbeit für Legierungen untersucht werden, die aus mehreren Komponenten mit von Probe zu Probe variierender, aber bekannter Konzentration bestehen. Im einzelnen werden dazu die relativen SI-Ausbeuten der Komponenten in Abhängigkeit von ihrer Konzentration gemessen.

* Ergebnisse der Dissertation von J. SCHELTEN, Universität Mainz.

¹ R. F. K. HERZOG u. R. P. VIEHBOECK, Phys. Rev. **76**, 855 [1949].

** Jetzt Kernforschungsanlage Jülich des Landes Nordrhein-Westfalen.